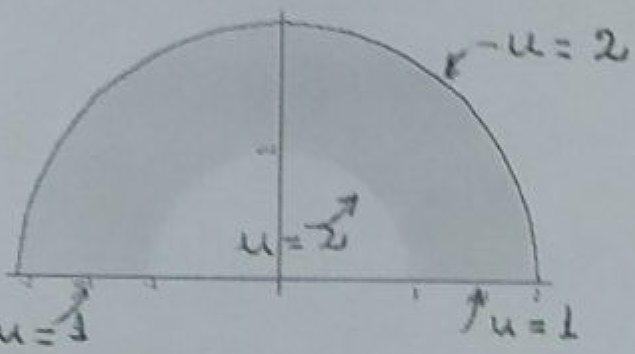
Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Quinta fecha. 11 de agosto de 2022.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sea $u(x,y)$ solución del problema de Dirichlet en la región que se encuentra en la figura y con las condiciones de contorno indicadas.



¿Es única? ¿Se anula en algún punto de ~~de~~ la región? Plantear el problema y describir un sistema físico que pueda modelarse mediante el mismo.

Ejercicio 2. Resolver:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{para todo } t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 4\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{3\pi x}{2}\right) & \text{para todo } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u_t(x,0) = 0 & \text{para todo } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}$$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Hallar la transformada de Fourier de f y obtener el valor de cada una de las siguientes integrales:

$$i) \int_0^\infty \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \operatorname{sen} x \, dx, \quad ii) \int_0^\infty \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \operatorname{sen}(x/2)\, dx,$$

$$iii) \int_0^\infty \frac{(x\cos x - \operatorname{sen}\ x)^2}{x^4} dx.$$

Ejercicio 4. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{c} u_t + \phi(x) & 0 < x < +\infty,\ t > 0 \qquad (c > 0) \\ u(0,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = e^{-x} & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

especificando las condiciones supuestas sobre ϕ.

Ejercicio 5. Obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que para $t \geqslant 0$ verifican:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) + \operatorname{Sh}(2t)H(t) \end{cases} ; \; x_1(0) = x_2(0) = 0$$

con $H(t)$ función de Heaviside.